

① Пусть u, v таковы что $u, v \in C^2(\Omega), u, v \in C^1(\bar{\Omega})$
 $u(x, y, z), v(x, y, z)$

$$\vec{A}(x, y, z) = u(x, y, z) \text{ grad } v(x, y, z) = \left\{ u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right\}$$

$$\iint_{\Sigma} u (\text{grad } v, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div} (u \text{ grad } v) d\tau \quad \ominus$$

$$\text{div } u \text{ grad } v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + u v_{xx} + u v_{yy} + u v_{zz} = u \Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v)$$

$$\ominus \quad \iiint_{\Omega} u \Delta v d\tau + \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } v) d\tau$$

1-я формула Грина $\left| \iint_{\Sigma} u \Delta v d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } v) d\tau \right.$

$$\vec{A} = v \text{ grad } u, \text{ тогда получаем}$$

$$\iint_{\Sigma} v \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\Omega} (\text{grad } v, \text{grad } u) d\tau$$

2-я формула Грина $\iint_{\Sigma} u \Delta v - v \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$

3-я формула Грина
 $u \in C^2(\Omega), u \in C^1(\bar{\Omega})$



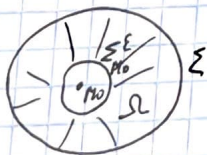
$M(x, y, z)$
 $P(\xi, \eta, \zeta)$

ξ или
 η это
 ζ — высота

$$\frac{1}{R_{MM_0}}$$

функция (x, y, z)

Учти, что учитывается особенность в M_0 . Вспомогательная Ω_ε и маленькая сфера S_ε .



$$\iint_{\Omega_\varepsilon} \left(u \Delta \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u \right) d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + \iint_{S_\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_{M_0}^\varepsilon} \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

" $\frac{1}{\varepsilon}$

$$C \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi \varepsilon^2 \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\iint_{\Sigma_{M_0}^\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) d\sigma$$

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{(x-x_0)}{R_{MM_0}}, -\frac{(y-y_0)}{R_{MM_0}}, -\frac{(z-z_0)}{R_{MM_0}} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = -\frac{2(x-x_0)}{2 R_{MM_0}^3} = -\frac{(x-x_0)}{R_{MM_0}^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = \left(\text{grad} \frac{1}{R_{MM_0}}, \vec{n} \right) = \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{R_{MM_0}^4} =$$

$$\frac{1}{R_{MM_0}^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^\varepsilon} u d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(M_0) 4\pi$$

Теорема III Green'а

~~$$\iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$~~

$$4\pi u(M_0) = - \iint_{\Omega} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u d\tau - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

2-я теорема Грина в E^2



$$\iint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dS = \int_L \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] dl$$

3 формула Грина в E^2

$$2\pi u(M_0) = - \iint_D \ln \frac{1}{\rho_{MM_0}} - \int_L \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\rho_{MM_0}} \right) - \ln \frac{1}{\rho_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\ell$$

Лекция №7 (Условие)

Постановка основной задачи для ур-ния Лапласа
и ур-ния Пуассона

1) Внутренняя задача Дирихле.

$$\Delta u = 0, M \in D$$

$$u|_{\Sigma} = f(p) \quad u \in C^2(\bar{D}) \cap C(\bar{D})$$

$$u(M) = \begin{cases} 1, & M \in D \\ f(p), & M \in \Sigma \end{cases} \text{ — контрпример.}$$

$$\Sigma$$

D

$$f(p)$$

Если $u \in C(\bar{D})$, то $f(p) \in C(\Sigma)$
Нужно разрешить граничные
условия быть кусочно-непрерывными

$$\bar{D} = D \cup \partial D = D \cup \Sigma$$

$$|u| < k$$

$$\lim_{M \rightarrow p} u(M) = f(p), \text{ где } p - \text{точка непрерывности}$$

Теорема единственности

u_1, u_2 — 2 решения задачи Дирихле.

$$v = u_1 - u_2$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0, M \in D \\ v|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

$$v \in C^2(\bar{D}) \cap C(\bar{D})$$

$$\max_{M \in \bar{D}} v(M) = 0$$

$$M \in \bar{D}$$

$$\min_{M \in \bar{D}} v(M) = 0$$

$$M \in \bar{D}$$

Теорема 2. Теорема устойчивости

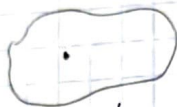
$$\Delta V = 0, M \in \mathbb{D}$$

$$V|_{\Sigma} = g(p) \quad |g(p)| < \varepsilon$$

$$|V|_{\Sigma} < \varepsilon \Leftrightarrow |V| < \varepsilon$$

Принимает

$$u|_{\Sigma} = 2023$$



$$u|_{\Sigma} = 2023$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u|_{x=0}, u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{y=0}, u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \quad u(x, y) = \sin x \sin y \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

2) Внутренние задачи Неймана.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in \mathbb{D} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(p), & u \in C^2(\mathbb{D}) \cap C^1(\overline{\mathbb{D}}) \end{cases}$$

$$v = u_1 - u_2$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \iint_{\mathbb{D}} v \Delta v \, d\vec{r} = - \iint_{\mathbb{D}} (\operatorname{grad} v)^2 \, d\vec{r} + \iint_{\Sigma} v \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$$

$$\operatorname{grad} v \equiv 0 \Rightarrow v = \text{const}$$

$$u_1 - u_2 = \text{const}$$

$$1) (x, x) \in M$$

$$2) (x, y) \in M \Leftrightarrow (y, x) \in M$$

$$3) x \sim z, z \sim y \Rightarrow x \sim y$$

$$x \sim x$$

$$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$$

$$x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

Внешний заряд. Потенциал в пространстве

$$\Delta u = 0, M \in \mathbb{R}^3$$

$$\Delta u = 0, M \in \mathbb{R}^3 / \bar{D}$$

$$u|_{\Sigma} = f(p)$$

$$\Delta u = 0, r > R$$

$$u|_{r=R} = f_0$$

$$u_1 = f_0$$

$$u_2 = f_0 \frac{R}{r} - \text{берем в сферических}$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$|u|_{M \rightarrow \infty} \rightarrow 0 - \text{свойство регулярности на бесконечности}$$

$$v = u_1 - u_2$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0, M \text{ вне } \bar{D} \\ v|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad \text{Возьмем сферу радиуса R так, чтобы}$$

$$|v|_{r=R} < \varepsilon$$

В области

$$(K_R \cap \bar{D})$$

$$\Delta v = 0$$

$$v|_{\Sigma} = 0$$

$$|v|_{r=R} < \varepsilon$$



3) Задача Дирихле
на множестве

$$\begin{cases} \Delta u = 0, M \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \\ u|_{\Sigma} = g(p) \end{cases}$$

$$|u|/N \rightarrow 0$$



Вместо этого $|u| < N$



$$V = N \ln \frac{R_{\text{ном}}}{R} \quad \frac{R_{\text{ном}}}{R} > 1$$

$$V|_{\Sigma} > 0$$

$$V|_{\Gamma_1} = N$$

Вместо этого $R_{\text{ном}} = R$

$$V|_{\Sigma} = 0 \quad V|_{\Gamma_1} < N$$

$V = V$ в области $\mathbb{C}_{R_1} \setminus \bar{D}$

Если $R_1 \rightarrow \infty$, то $V \rightarrow 0$

Решение уравнения Лапласа в полярных координатах (r, φ)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, u = R(r) \Phi(\varphi)$$

$$r \frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} \cdot \Phi + R \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{r \frac{d}{dr} (r \frac{dR}{dr})}{R} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda \quad \begin{cases} \Phi'' + \lambda \Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \forall \varphi \in [0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$$1) \lambda = 0, \Phi'' = 0 \quad \Phi_0(\varphi) = A_0$$

$$2) \lambda > 0$$

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \varphi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \varphi)$$

$$\Phi(0) = C_1 = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi)$$

$$\Phi'(0) = \sqrt{\lambda} C_2 - \sqrt{\lambda} C_1 \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) + \sqrt{\lambda} C_2 \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi)$$

$$C_1 (1 - \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi)) - C_2 \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 0$$

$$\{ C_1 \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) + C_2 (1 - \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi)) = 0$$

$$\Delta = (1 - \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi))^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 0$$

$$\begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda} = n, \lambda_n = n^2$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 - C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$$

2) Найдём $R_n(r)$

$$a) \lambda_0 = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} = 0$$

$$R(r) = A_0 + B_0 \ln r$$

$$b) \lambda_n = n^2$$

$$r \frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0$$

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$$

$$R(r) = r^M$$

$$M(M-1) r^M + M r^M - n^2 r^M = 0$$

$$M^2 - n^2 = 0$$

$$R_n(r) = E_n r^n + G_n \frac{1}{r^n}$$

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \frac{1}{r^n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (C_n \cos n\varphi +$$

$$D_n \sin n\varphi)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < R \\ u|_{r=R} = f(\varphi) \end{cases}$$

$$m, x \quad \varphi \in (r < R), \quad m, |y| < R$$

$$B_0 = 0, (n > 0, R_n = 0)$$

$$f_0 = \frac{\tilde{A}_0}{2}$$

$$u(r, \varphi) = f(\varphi) = \frac{\tilde{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

$$A_n = \frac{1}{R^n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$$

$$B_n = \frac{1}{R^n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad r < R$$

Если $r > R$

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}$$

Лекция № 7. (Теория)

E^n

1) $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определено в $\Omega \subset E^n$

Определение: функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется гармонической в области Ω , если

$$u \in C^2(\Omega) \text{ и } \Delta u = 0 \text{ в } \Omega$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

Связь между гармоническими функциями двух переменных и аналитическими функциями

$$z = x + iy \quad f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Если $f(z)$ аналитическая, то выполняются Условия Коши - Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} & u_{xx} &= v_{yx} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} & v_{xy} &= -u_{yy} \\ & & u_{xx} &= -u_{yy} \end{aligned}$$

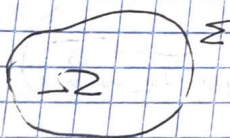
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow \Delta u = 0$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \Leftrightarrow \Delta v = 0$$

Если $f(z)$, то её действительная и мнимая части гармонические аналитические

функции.

Понятие гармонических функций в E^3



$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = - \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) - \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

Если u гармоническая, то

$$\int_{\Sigma} \left(u(p) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) - \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0$$

$$u \in C^2(\Sigma), u \in C^1(\bar{\Omega})$$

И только гармоничная, но и $u \in C^1(\bar{\Omega})$

Лемма гармонической функции

II Если u гармоническая в Ω , то

$$\sum_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_p = 0 \quad \forall \text{ замкнутой пов. } \tilde{\Sigma} \subset \Omega$$

2-ая фундаментальная форма для обн $\tilde{\Sigma}$ обн пов. $\tilde{\Sigma}$

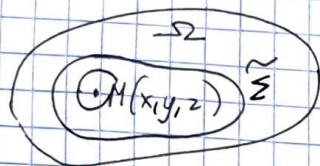
$$\textcircled{\Sigma} \tilde{\Sigma} = \emptyset$$

$$\sum_{\Sigma} (u \Delta \tilde{v} - \tilde{v} \Delta u) d\sigma_p = \sum_{\Sigma} \left(u \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} - \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_p$$

$\tilde{v} = 1$ - хорошая гармоническая функция

$$\sum_{\Sigma} \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_p = 0$$

Теорема 2 Если функция $u(x, y, z)$ гарм. в Ω , то $u(x, y, z)$ бесконечно
гладкая в Ω
 $\tilde{\Sigma} \subset \Omega$



$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\Sigma} \left(u(p) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{Mp}} \right) - \frac{1}{R_{Mp}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_p$$

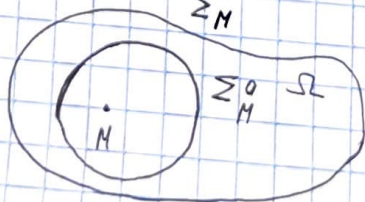
$$P(\Sigma_M^{\varepsilon}, \tilde{\Sigma}) \geq a > 0$$

$$u(M) = u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\Sigma} u(\eta, \eta, \eta) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\eta)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\eta)^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{(x-\eta)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\eta)^2}} \frac{\partial u(\eta, \eta, \eta)}{\partial n} d\sigma_p$$

Теорема 3 Теорема о средних значениях

Пусть $u(x, y, z)$ гармоническая в области Ω . Тогда $\forall M \in \Omega$

$$u(M) = \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{\Sigma_M^a} u(p) d\sigma_p$$

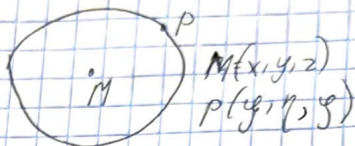


Доказательство

Заменим 3-ю формулу

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MP}}$$

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_M^a} u(p) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_p$$



$$\vec{n} = \left\{ \frac{y-x}{R_{MP}}, \frac{y-y}{R_{MP}}, \frac{y-z}{R_{MP}} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2(y-x)}{R_{MP}^3} = -\frac{(y-x)}{R_{MP}^3}$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = \left\{ -\frac{(y-x)}{R_{MP}^3}, -\frac{(y-y)}{R_{MP}^3}, -\frac{(y-z)}{R_{MP}^3} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = \left(\text{grad} \frac{1}{R_{MP}}, \vec{n} \right) = -\frac{((y-x)^2 + (y-y)^2 + (y-z)^2)}{R_{MP}^4} = -\frac{1}{R_{MP}^2}$$

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_M^a} u(p) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_p = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_M^a} u(p) d\sigma_p$$

Теорема 4 Принцип максимального значения

Если $u \in C(\bar{\Omega})$ и гармоническая в Ω , то

$$\max_{\bar{\Omega}} u(M) = \max_{\Sigma} u(M)$$

$$\min_{\bar{\Omega}} u(M) = \min_{\Sigma} u(M)$$

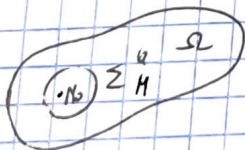
Доказательство: Пусть $\exists m M_0 \in \Omega$, такая что

$$u(M_0) = \max_{\bar{\Omega}} u(M)$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(p) d\sigma_p \leq \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(M_0) d\sigma_p =$$

$$= u(M_0) \Rightarrow u(M_0) = u(p) \forall p \in \Sigma_{M_0}^a$$

$$u(p_n) \quad p_n \rightarrow \Sigma \quad u(p_n) = u(M_0)$$



$$u(p^*) = u(p_0) \quad p^* \in \Sigma$$

Следствие. Если $u \in C(\bar{\Omega})$ гармон. в Ω и достигает своего максимального или минимального значения внутри Ω , то

$u(x, y, z)$ постоянна в Ω .

Гармонические функции в E^2

$$u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$



$$\Delta u = 0 \text{ в } D$$

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 \quad \forall L$$

Теорема о среднем значении в E^2

Если $u(x, y)$ гармон. в D , то $\forall M \in D$

$$u(M) = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{L_M^a} u(p) d\sigma \quad L_M^a \text{ окр.: окружность } a \text{ с центром в } M$$

$$L_M^a \in D$$

3 формулы Грина для $u(x, y)$

$$u(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) - \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

для гармонической функции u .

$$u(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_M^a} \left(u(p) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) - \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

$\ln \frac{1}{a}$

$$M(x, y) \quad P(\xi, \eta)$$

$$\vec{r} = \left\{ \frac{(\xi-x)}{\rho_{MP}}, \frac{(\eta-y)}{\rho_{MP}} \right\}$$

$$\text{grad } \ln \frac{1}{\rho_{MP}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \rho_{MP} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{2\rho} \frac{\partial (\xi-x)}{\partial \xi} = -\frac{(\xi-x)}{\rho^2}$$

$$\text{grad } \ln \frac{1}{\rho_{MP}} = \left\{ -\frac{(\xi-x)}{\rho_{MP}^2}, -\frac{(\eta-y)}{\rho_{MP}^2} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) = \left(\text{grad } \ln \frac{1}{\rho}, \vec{r} \right) = -\frac{((\xi-x)^2 + (\eta-y)^2)}{\rho_{MP}^3} = -\frac{1}{\rho_{MP}} = -\frac{1}{a}$$

$$u(r) = \frac{1}{2\pi a} \int_{L_M} u(p) d\varphi$$

Задача №8. Уравнение

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a \\ u(r, \varphi) \in C^2(r, \varphi) \cap C(r \leq a) \\ u|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (\cos n\varphi \cos n\psi + \sin n\varphi \sin n\psi) \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) \right) d\varphi$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n e^{in(\varphi - \psi)} \right) =$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{t e^{i(\varphi - \psi)}}{(t e^{in(\varphi - \psi)} - 1)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{t e^{i(\varphi - \psi)}}{(1 - t e^{i(\varphi - \psi)})(1 - t e^{-i(\varphi - \psi)})} \right) =$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{t e^{i(\varphi - \psi)} - t^2}{1 + t^2 - (e^{i(\varphi - \psi)} + e^{-i(\varphi - \psi)})} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{t \cos(\varphi - \psi) - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos(\varphi - \psi)} = \frac{1 + t^2 - 2t \cos(\varphi - \psi) + 2t \cos(\varphi - \psi) - t^2}{2(1 + t^2 - 2t \cos(\varphi - \psi))}$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \frac{(1 - t^2)}{2(1 + t^2 - 2t \cos(\varphi - \psi))} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \psi)} d\varphi$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi, \varphi, \psi) f(\psi) d\psi$$

$$u(r, \varphi, 0, \varphi) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi)}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a \\ u|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \Delta u = 0, r > 0 \\ |u| < M \end{cases}$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{(r^2 - a^2) d\psi}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \psi)}$$

$$\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b$$

$$u \in C^2([0, a] \times [0, b]) \cap C([0, a] \times [0, b])$$

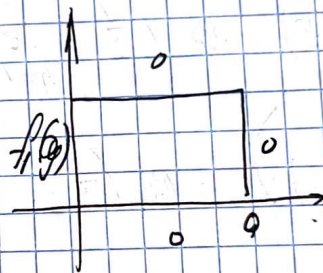
$$u(x=0) = f_1(y), u(x=a) = f_2(y);$$

$$u(y=0) = f_3(x), u(y=b) = f_4(x)$$

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$\Delta u_1 = 0$$

$$\begin{cases} u_1|_{x=0} = f_1(y); u_1|_{x=a} = 0 \\ u_1|_{y=0} = 0; u_1|_{y=b} = 0 \end{cases}$$



$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(0) = 0; Y(b) = 0 \end{cases}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0; \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$$

$$Y_n(y) = \sin \frac{\pi n y}{b}$$

$$\begin{cases} x_n'' - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 x_n = 0 \\ x_n(0) = (f_1)_n \\ x_n(a) = 0 \end{cases}$$

$$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n y}{b}$$

$$u_n(x, y) = x_n(x) \sin \frac{\pi n y}{b}$$

$$u_1(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(0) \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad u_1(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(a) \sin \frac{\pi n y}{b}$$

$$\begin{cases} u_1(0, y) = f_1(y) \\ u_1(a, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n'' - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 x_n = 0 \\ x_n(0) = (f_1)_n \\ x_n(a) = 0 \end{cases}$$

$$x_n(x) = c_1 \sinh \frac{\pi n}{b} (a-x) + c_2 \cosh \frac{\pi n}{b} (a-x)$$

$$x_n(a) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0, \quad c_2 = 0$$

$$x_n(x) = c_1 \sinh \frac{\pi n}{b} (a-x); \quad x_n(0) = c_1 \sinh \frac{\pi n a}{b} = (f_1)_n$$

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_1)_n \sin \frac{\pi n y}{b}}{\sinh \frac{\pi n a}{b}} \cdot \sinh \frac{\pi n}{b} (a-x)$$

$$u_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_2)_k \sin \frac{\pi k y}{b} \frac{\sinh \frac{\pi k x}{b}}{\sinh \frac{\pi k a}{b}}$$

$$u_3(x, y), u_4(x, y)$$

Можно ли доказать теорему существования для
данных операторов? - Да

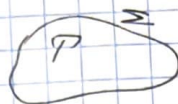
$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N, \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad N(t) = N_0 e^{\lambda t} = N_0 q^t$$

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \rho \\ R(0) = R_0 \end{cases} \quad R(t) = R_0 + \rho t$$

Функция Грина

Рассмотрим трехмерный случай.

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} \right) \right) d\sigma -$$



$$- \iiint_{\tau} \frac{\Delta u}{4\pi R_{MM_0}} d\tau$$

Пусть v гармоническая функция, $\Delta v = 0$

$$\iiint_{\tau} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$0 = \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\tau} v \Delta u d\tau$$

Возьмем 2 функции

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} G(P, M_0) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iint_{\Sigma} u(P) \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\tau} G \Delta u d\tau$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M, M_0)$$

Вспомогательная функция удовлетворяет, чтобы $G(M, M_0)|_{\Sigma} = 0$, тогда, если $\Delta u = 0$, то

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma} u(P) \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad F=0$$

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \left(f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma + \iiint_{\tau} G F d\tau \right) \quad \begin{cases} \Delta u = -F \\ G(M, M_0)|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Вспомогательная функция Грина:

$$\Delta u = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = g(P) \quad \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = -\frac{1}{S} \text{ - константа}$$

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} G(P, M_0) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iint_{\Sigma} u(P) \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\tau} G \Delta u d\tau$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M, M_0)$$

$$u(x, y, z)$$

$$M_0(x, y, z)$$

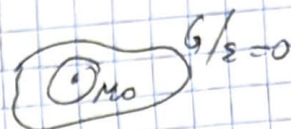
$$\begin{cases} \Delta G = 0, & M \neq M_0 \\ G(M, M_0)|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{M \in \Sigma} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} \end{cases}$$

Для того, чтобы решить задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\Sigma} = f(p) \end{cases}$$

мы знаем $G(M, M_0): u(M_0) = - \iint_{\Sigma} f(p) \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma$

Вспомогательная функция Грина



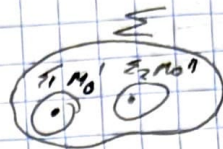
1) $G(M, M_0) > 0 \quad \forall M \neq M_0$

$G|_{\Sigma} > 0$, т.к. $\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + \psi > 0, \quad \psi = \varepsilon \quad (R_{MM_0} = \varepsilon)$

2) $G(M, M_0) = G(M_0, M)$

Функции u, v - вспомогательные функции

$$0 = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$



$u(M) = G(M, M_0'), \quad v(M) = G(M, M_0'')$

$$\iint_{\Sigma} \left(G(p, M_0') \frac{\partial G}{\partial n}(p, M_0'') - G(p, M_0'') \frac{\partial G}{\partial n}(p, M_0') \right) d\sigma +$$

$$+ \iint_{\Sigma_1} \left(G(p, M_0') \frac{\partial G}{\partial n}(p, M_0'') - G(p, M_0'') \frac{\partial G}{\partial n}(p, M_0') \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} G(p, M_0')$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(p, M_0'') - G(p, M_0'') \frac{\partial G}{\partial n}(p, M_0') d\sigma = 0$$

$$u(M_0'') = G(M_0'', M_0') = \iint_{\Sigma_2} G(M_0'', M_0') \frac{\partial G}{\partial n}(M_0', M_0'') - G(M_0', M_0'') \frac{\partial G}{\partial n}(M_0'', M_0') d\sigma$$

$$v(M_0') = G(M_0', M_0'') = \iint_{\Sigma_1} G(M_0', M_0'') \frac{\partial G}{\partial n}(M_0'', M_0') - G(M_0'', M_0') \frac{\partial G}{\partial n}(M_0', M_0'') d\sigma$$

$u(M_0'') - v(M_0') = 0$

Внутреннее задание функции Грина

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < R \\ u|_{r=R} = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

1.1.2.2

11/11/20





























$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \left(\frac{1}{\omega_0} \right) = -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} = -\frac{1}{\omega_0^2} (\text{grad } \omega_0, \vec{n}) = -\frac{1}{\omega_0^2} (\vec{r}_{\omega_0}, \vec{n}) = -\frac{1}{\omega_0^2} \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2 + R^2 - r_0^2}{2R\omega} - \frac{R}{r_0} \left(-\frac{1}{\omega^2} \frac{\omega^2 + R^2 - r_1^2}{2R\omega} \right) \right)$$

Задача №8. (Решить)

Внутренние задачи Дирихле в E^3

Определение Функция

$u(x, y, z)$ называется решением внутренней задачи Дирихле, если

$$u \in C(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$



$$\tilde{u}(x, y, z) = \begin{cases} \text{const в } \Omega \\ \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma \end{cases}$$

Пример показывает
важность непрерывности
 φ в замыкании Ω

Теорема единственности Пусть функции $u_i(x, y, z), i=1, 2$ таковы, что $u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$

$$\Delta u_i = 0, (x, y, z) \in \Omega \text{ и } u_i(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \quad i=1, 2$$

$$\text{Тогда } u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z) \text{ в } \bar{\Omega}$$

Доказательство. Рассмотрим $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

$$u \in C(\bar{\Omega})$$

$$u \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \Sigma$$

$$u(x, y, z) \text{ гарм. в } \Omega \quad \text{и} \quad u \in C(\bar{\Omega})$$

$$\max_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} u(x, y, z) = \max_{(x, y, z) \in \Sigma} u(x, y, z) = 0$$

$$\min_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} u(x, y, z) = \min_{(x, y, z) \in \Sigma} u(x, y, z) = 0$$

Внутренняя задача Дирихле в E^2

Определение Функция $u(x, y)$ называется решением внутренней задачи Дирихле в E^2 , если

$$u \in C(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega), \Delta u = 0, (x, y) \in \Omega$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L$$

Теорема единственности
Пусть функции $u_i(x, y), i=1, 2$ таковы, что

$$u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega), \Delta u_i = 0, (x, y) \in \Omega$$

$$u_i(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L. \text{ Тогда } u_1(x, y) = u_2(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}$$

Устойчивость решения внутренней задачи Дирихле в E^2

Лемма Пусть функции $u_i(x, y, z), i=1, 2$ таковы, что

$$u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega), \Delta u_i = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u_1(x, y, z) \geq u_2(x, y, z) \text{ для } (x, y, z) \in \Sigma$$

$$\text{Тогда } u_1(x, y, z) \geq u_2(x, y, z) \text{ для } (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

Доказательство. Рассмотрим $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

$$u \in C(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega), \Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u(x, y, z) \geq 0, (x, y, z) \in \Sigma$$

$$\max u(x, y, z) = \max u(x, y, z) \geq 0 \Rightarrow u(x, y, z) \geq 0, (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

$$(x, y, z) \in \bar{\Omega} \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

Теорема устойчивости Пусть функции $u_i(x, y, z), i=1, 2$ таковы, что

$$u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u_i = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u_i(x, y, z) = \varphi_i(x, y, z)$$

$$\text{Тогда } \max_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} |u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)| \leq \max_{(x, y, z) \in \Sigma} |\varphi_1(x, y, z) - \varphi_2(x, y, z)|$$

Доказательство. Рассмотрим $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

$$u \in C(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega), \Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u(x, y, z) = \varphi \quad (x, y, z) \in \Sigma \quad \varphi(x, y, z) = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\varphi_0 = \max_{(x, y, z) \in \Sigma} |\varphi(x, y, z)|$$

$$-\Phi_0 \leq u(x, y, z) = \Phi_0$$

$$(x, y, z) \in \Sigma$$

Введем функции

$$U^+(x, y, z) = \Phi_0$$

$$U^-(x, y, z) = -\Phi_0$$

$$U^{\pm}(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$$

$$U^{\pm} \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta U^{\pm} = 0 \quad (x, y, z) \in \Omega$$

Доказательство $u(x, y, z) \leq U^+(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$

$$u(x, y, z) \leq U^+(x, y, z)$$

$$u(x, y, z) \leq U^+(x, y, z) = \Phi_0 \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

$$U^-(x, y, z) \leq u(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

$$-\Phi_0 = U^-(x, y, z) \leq u(x, y, z) \leq U^+(x, y, z) = \Phi_0 \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

$$|u(x, y, z)| \leq \Phi_0$$

$$\bar{u}(x, y, z) \text{ и } \bar{\varphi}(x, y, z)$$

$$u_n(x, y, z) \text{ и } \varphi_n(x, y, z) \quad \therefore \quad \text{то есть}$$

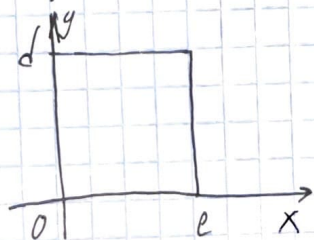
$$\varphi_n(x, y, z) \rightrightarrows \bar{\varphi}(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Sigma, \quad n \rightarrow \infty$$

$$u_n(x, y, z) \rightrightarrows \bar{u}(x, y, z), \quad n \rightarrow \infty$$

$$\forall (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

Существование решения

внутренней задачи Дирихле в прямоугольнике

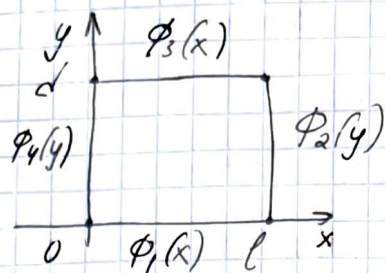


$$\Pi = \{(x, y), 0 < x < l, 0 < y < d\}$$

Найти $u(x,y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Pi})$, $u \in C^2(\Pi)$

$$\Delta u = 0, (x,y) \in \Pi, u(x,y) = \Phi(x,y), (x,y) \in L$$

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \Phi_1(x), & 0 \leq x \leq l, y=0 \\ \Phi_2(y), & x=l, 0 \leq y \leq d \\ \Phi_3(x), & 0 \leq x \leq l, y=d \\ \Phi_4(y), & x=0, 0 \leq y \leq d \end{cases}$$



$$\Pi = \{(x,y), 0 < x < l, 0 < y < d\}$$

$$\Phi_1(l) = \Phi_2(0)$$

$$\Phi_2(d) = \Phi_3(l)$$

$$\Phi_3(0) = \Phi_4(d)$$

$$\Phi_4(0) = \Phi_1(0)$$

$$\tilde{u}(x,y) = u(x,y) - c_1 - c_2x - c_3y - c_4xy$$

$$\tilde{u} \in C(\bar{\Pi}), \tilde{u} \in C^2(\Pi)$$

$$\Delta \tilde{u} = 0 \text{ в } \Pi$$

$$\tilde{\Phi}(x,y) = \tilde{u}(x,y) \quad (x,y) \in L$$

$$\tilde{\Phi}(0,0) = \tilde{\Phi}(l,0) = \tilde{\Phi}(l,d) = \tilde{\Phi}(0,d) = 0$$

$$\tilde{\Phi}(x,y) = \Phi(x,y) - c_1 - c_2x - c_3y - c_4xy$$

$$\Phi(0,0) - c_1 = 0$$

$$\Phi(l,0) - c_1 - c_2l = 0$$

$$\Phi(0,d) - c_1 - c_3d = 0$$

$$\Phi(l,d) - c_1 - c_3d = 0$$

$$\Delta \tilde{u} = 0 \quad (x,y) \in \Pi$$

$$\tilde{u}(x,y) = \tilde{\Phi}(x,y) \quad (x,y) \in L$$

$$\tilde{\Phi}(0,0) = \tilde{\Phi}(l,0) = \tilde{\Phi}(l,d) = \tilde{\Phi}(0,d) = 0$$

$$\tilde{u}(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y)$$

Найти $u(x,y)$ такую, что

$$u \in C(\bar{\Pi}), u \in C^2(\Pi)$$

$$\Delta u = 0 \quad (x,y) \in \Pi$$

$$u(x, y) = \hat{\Phi}(x, y) \quad (x, y) \in L$$

$$\hat{\Phi}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, y=0 \\ 0, & x=l, 0 \leq y \leq d \\ 0, & 0 \leq x \leq l, y=d \\ 0, & x=0, 0 \leq y \leq d \end{cases}$$

Теорема Пусть заданная $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x) \in C'[0, l]$

$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует $u(x, y)$ такая, что

$$u \in C(\Pi), u \in C^2(\Pi), \Delta u = 0 \quad (x, y) \in \Pi$$

$$u(x, y) = \hat{\Phi}(x, y), \quad (x, y) \in L$$

Доказательство $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$$v(x, y) = X(x) Y(y)$$

$$X''(x) Y(y) + X(x) Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

$$① X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$② Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad X_n(x) = \tilde{C}_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\begin{cases} Y_n''(y) - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Y_n(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(d) = 0 \end{cases}$$

$$Y_n(y) = \tilde{C}_n \sinh \frac{\pi n}{l} (d - y)$$

$$v_n(x, y) = C_n \sin \frac{\pi n x}{l} \sinh \frac{\pi n}{l} y$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} \frac{\sinh \frac{\pi n}{l} (d - y)}{\sinh \frac{\pi n}{l} d} \quad (1)$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n s}{l} ds$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x)$$

Докажем, что $u(x,y)$ отв. ф-ой (1) упр. и непрерыв. в Π

Так как $\varphi \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$ сходится

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$$

$$|u_n(x,y)| \leq |\varphi_n(x,y)| \quad \forall (x,y) \in \Pi$$

Докажем, что $u(x,y)$ имеет непрерыв. втор. производ.

$$\Pi_{y_0} = \{(x,y), 0 \leq x \leq l, y_0 \leq y \leq d\} \quad \exists y_0 > 0$$

$$u_{xx}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) \sin \frac{\pi n x}{l} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{l}(d-y)\right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{l} d}$$

$$|\varphi_n| \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{l}(d-y_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{l} d}$$

Внутренняя задача Неймана
 $\bar{b} \in \mathbb{R}^3$

Определение. Функция $u(x,y,z)$

называется решением внутренней задачи Неймана

$$u \in C^1(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u = 0, (x,y,z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = \varphi(x,y), (x,y) \in \Sigma$$

Теорема единственности Пусть функции $u_i(x,y,z)$, $i=1,2$, таковы, что $u_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $u_i \in C^2(\Omega)$,

$$\Delta u_i = 0, (x,y,z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}(x,y,z) = \varphi(x,y,z), (x,y,z) \in \Sigma$$

Тогда $u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) = \text{const}$

Д-во $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

$$u \in C^1(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u = 0 \quad (x, y, z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \Sigma$$

Требуем граничные условия

$$\iint_{\Omega} u \Delta u \, d\vec{r} = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} - \iint_{\Omega} (\text{grad } u \cdot \text{grad } u) \, d\vec{r}$$

$$\iint_{\Omega} (\text{grad } u)^2 \, d\vec{r} = 0$$

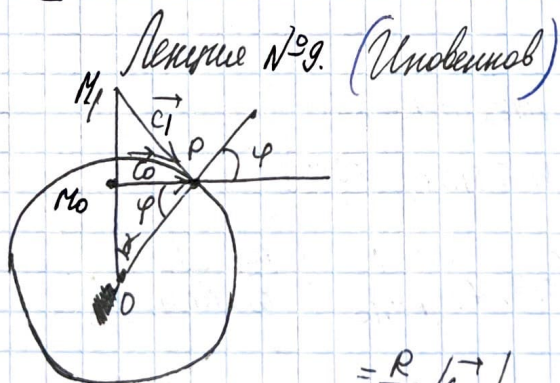
$$\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 + \frac{\partial u}{\partial z}^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = \text{const}$$

Необходимые условия разрешимости внутренних задач Дирихле.



$$\Sigma_n \rightarrow \Sigma$$

$$\iint_{\Sigma} \psi \, d\sigma = 0$$



$$= \frac{R}{r_0} |\vec{r}_0|$$

$$|\vec{r}_0|^2 = r_0^2 + R^2 - 2r_0R \cos \varphi$$

$$|\vec{c}_1|^2 = r_1^2 + R^2 - 2r_1R \cos \varphi$$

$$|\vec{c}_1|^2 = \sqrt{\frac{R^4}{r_0^2} + R^2 - 2\frac{R^3}{r_0} \cos \varphi} =$$

$$G(M, N_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_{MN_0}} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{R_{MN_1}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) = -\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2} (\text{grad } r_0, \vec{e}_n) = -\frac{1}{r_0^2} \cos \varphi$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_p = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) - \frac{R}{r_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right)$$

$$\cos \varphi = \frac{r_0^2 + R^2 - r_1^2}{2Rr_0}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_p = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r_0^2} \frac{(r_0^2 + R^2 - r_1^2)}{2Rr_0} + \frac{R}{r_0} \frac{(r_1^2 + R^2 - r_0^2)}{2Rr_1^3} \right) =$$

$$|\vec{r}_1| = r_1 = \frac{R}{r_0} r_0 = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{r_0^2 + R^2 - r_0^2}{2Rr_0^3} + \frac{R}{r_0} \frac{\frac{R^2}{r_0^2} r_0^2 + R^2 - \frac{R^4}{r_0^2}}{2R \frac{R^3}{r_0^3} r_0^3} \right)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{-r_0^2 - R^2 + r_0^2 + r_0^2 + r_0^2 - R^2}{2Rr_0^3} \right)$$

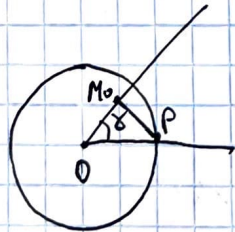
$$-\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_p = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{R^2 - r_0^2}{Rr_0^3} \right)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R \\ u|_{r=R} = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Omega} f(\theta, \varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{Rr_0^3} R^2 d\Omega$$

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \frac{(R^2 - r_0^2) \sin \theta d\theta d\varphi}{(r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$



$$\cos \gamma = \vec{r}_{OM_0} \cdot \vec{r}_{OP}$$

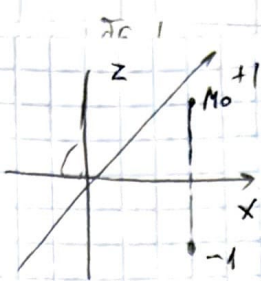
$$\vec{r}_{OM_0} = \{ \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0 \}$$

$$\vec{r}_{OP} = \{ \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \}$$

$$u_2(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(r, \theta, \varphi) \left(\frac{1}{Rr_{MN_0}} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{Rr_{MN_1}} \right) \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = -F, & r < R \\ u_2|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

$$u_2|_{r=R} = 0$$



$$\begin{cases} \Delta u = 0, z > 0 \\ u|_{z=0} = g(x, y) \end{cases}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_1}} \right) =$$

$$M_1(x_0, y_0, -z_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2)^{1/2}} \right)$$

$$h = -\vec{e}_z$$

$$-\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z=0} = \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{2(z-z_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{2(z+z_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{2z_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \frac{z_0 dx dy}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, z > 0 \\ u|_{z=0} = \sin x \sin y \end{cases}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$u(x, y, z) = \sin x \sin y h(z)$$

$$\begin{cases} -h - h + h'' = 0 & h'' - 2h = 0 \\ h|_{z=0} = 1 \\ |h| \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$h(z) = C_1 e^{\sqrt{2}z} + C_2 e^{-\sqrt{2}z}$$

$$h(+\infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$h(0) = C_2 e^{-\sqrt{2} \cdot 0} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < R, z > 0 \\ u|_{z=0} = g(r) \end{cases}$$

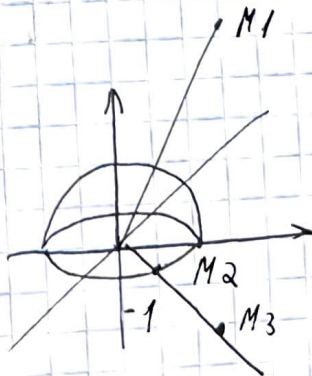
Сформулируйте задачу Дирихле

Пример:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1 \\ u|_{r=1} = 1 \end{cases}$$

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$C_1 + C_2 = 1$$



$$g(M, M_0) = \frac{1}{2\pi i}$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

$$u_x v_x + u_y v_y = 0$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ u_x v_x + u_y v_y = 0 \end{cases}$$

$f(z)$ - аналитическое функцирование

$$f'(z) \neq 0$$

$$\tau(x, y) = \tau(x(u, v), y(u, v)) = \tilde{\tau}(u, v)$$

$$\begin{cases} u = u(x, y) \Leftrightarrow x = x(u, v) \\ v = v(x, y) \quad y = y(u, v) \end{cases}$$

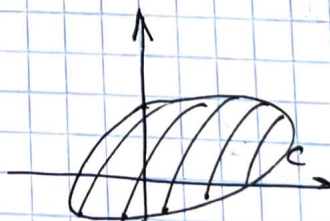
$$\tau_x = \tilde{\tau}_u u_x + \tilde{\tau}_v v_x$$

$$\tau_{xx} = \tilde{\tau}_{uu} u_x^2 + \tilde{\tau}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{\tau}_{uv} u_x v_x + \tilde{\tau}_u u_{xx} + \tilde{\tau}_v v_{xx}$$

$$\Delta \tau = \tau_{xx} + \tau_{yy} = \tilde{\tau}_{uu} (u_x^2 + u_y^2) + \tilde{\tau}_{vv} (v_x^2 + v_y^2) + 2\tilde{\tau}_{uv} (u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{\tau}_u (u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{\tau}_v (v_{xx} + v_{yy})$$

$$\Delta_{x,y} \tau = |f'(z)|^2 \Delta_{u,v} \tilde{\tau}$$

$$\Delta_{u,v} \tilde{\tau} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta_{x,y} \tau$$



$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y) \in D \\ u|_C = g(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = u(x, y) \\ \eta = v(x, y) \end{cases}$$

$$f'(z_0) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

$$u_x \cdot v_y + v_x u_y + i v_x v_y - i u_y u_x$$

$$|f'(z)|^2 \Delta_{u,v} \tilde{\tau}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\Sigma} = g(\rho) \end{cases}$$

Если D - односвязная область

$$\Delta u = 0 \quad u \in D$$

$$u|_{\Sigma} = g(\rho)$$

$$G(M, 0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + v(M)$$

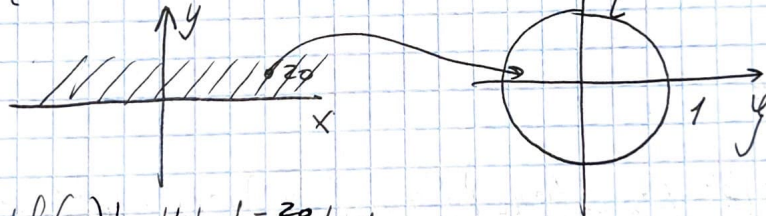
$$\begin{cases} \Delta G = 0, r \neq 0 \\ G|_{r=1} = 0 \end{cases}$$

$$G|_{r=1} = 0$$

Пусть $f(z)$ конформно отображает
отр. D на единичный круг $|f| = 1$.
с переводом т. z_0 в 0.

$$G(M, M_0) = G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z)|}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, y > 0 \\ u|_{y=0} = g(x) \end{cases}$$



$$f(z) = k \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

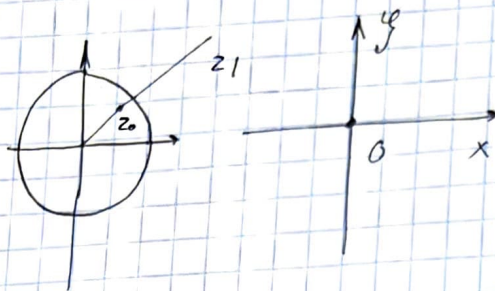
$$|f(0)| = |k| \left| \frac{-z_0}{-\bar{z}_0} \right| = 1$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} - \frac{-2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} \right) = \\ &= \frac{1 \cdot y_0}{\pi (x-x_0)^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

Ans. 3/2

$$\psi(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{1}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx$$



$$\begin{cases} |z_1| = \frac{R^2}{|z_0|} \\ \arg z_1 = \arg z_0 \end{cases} \quad z_1 =$$

$$f(z) = k \frac{z - z_0}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}}$$

$$|f(R)| = |\tilde{k}| \frac{|R - z_0|}{|R^2 - R \bar{z}_0|} = |\tilde{k}| \frac{1}{R} = 1, \tilde{k} = R$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R^2 - z \bar{z}_0}{R(z - z_0)} \right|$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \left(R^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \right)^2 + \left(2Rr_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \right)^2 \right) - \ln R - \ln \left(\left(R \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0 \right)^2 + \left(R \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0 \right)^2 \right)$$

$$-\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$-\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{4\pi} \frac{\left(\left(2(R^2 - Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) \right) (-r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) + 2Rr_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) \right)}{(R^2 - Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^2 + (Rr_0 \sin(\varphi - \varphi_0))^2} + 0$$

$$= -2 \frac{(R \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0) \cos \varphi + 2(R \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0) \sin \varphi}{(R \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0)^2 + (R \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0)^2}$$

Лекция №9 (Димов)

Внешняя задача Дирихле
в пространстве.

Определение Функция $u(x, y, z)$ называется решением
внешней задачи Дирихле, если

$$u \in C(E^3 \setminus \Omega), u \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega})$$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

$$u(x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0, \text{ что}$$

$$|u(x, y, z)| < \varepsilon, \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > A$$

Теорема единственности Пусть функции $u_i(x, y, z)$,
таковы, что $u_i \in C(E^3 \setminus \Omega), u_i \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega})$

$$\Delta u_i = 0, (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$u_i(x, y, z) = \varphi_i(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

$$u_i(x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty. \text{ Тогда}$$

$$u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z) \quad (x, y, z) \in E^3 \setminus \Omega$$



Доказательство $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) -$
 $- u_2(x, y, z)$

$$u \in C(E^3 \setminus \Omega); u \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega})$$

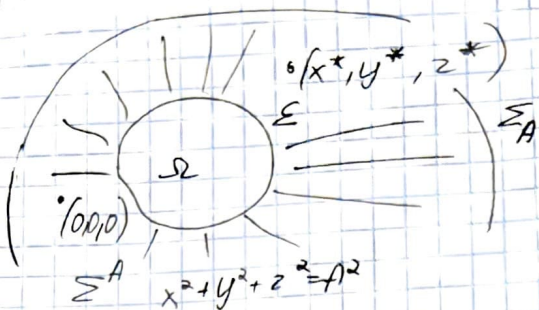
$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \Sigma$$

$$u(x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$$

Пусть $\exists (x^*, y^*, z^*)$, т.ч.

$$u(x^*, y^*, z^*) = \varepsilon > 0$$



Рассмотрим ограниченную область Ω_A
 границей $\Sigma \cup \Sigma_A$. $u \in C(\overline{\Omega_A})$, $u \in C^2(\Omega_A)$
 $\Delta u = 0$, $(x, y, z) \in \Omega_A$. Для гармонической в $\Omega_A \Rightarrow$
 можно применить принцип максимального значения

$$\max u(x, y, z) = \max_{\Sigma \cup \Sigma_A} u(x, y, z)$$

$$(x, y, z) \in \Omega_A \quad (x, y, z) \in \Sigma \cup \Sigma_A$$

При $A \rightarrow \infty$ $\max_{\Sigma_A} u(x, y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$, получим противоречие.

Пример неограниченности без условия на
 бесконечности

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1; \quad \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega$$

$$u(x, y, z) = 1 \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

$$u_1(x, y, z) = 1$$

$$u_2(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$u_2(x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$$

Внешняя задача Дирихле на плоскости

Определение Функция $u(x, y)$ называется решением
 внешней задачи Дирихле на плоскости, если

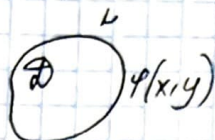
$$u \in C(E^2 \setminus \overline{D}), \quad u \in C^2(E^2 \setminus \overline{D})$$

$$\Delta u = 0 \quad (x, y, z) \in E^2 \setminus \overline{D}$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad (x, y) \in L$$

$$|u(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in E^2 \setminus \overline{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)(-2y) + 2(2xy + 2x_0y_0) \cdot 2x \right)$$



Теорема единственности. Пусть функции $u_i(x, y)$, $i=1, 2$ такие, что

$$u_i \in C(E^2 \setminus \bar{D}), u_i \in C^2(E^2 \setminus \bar{D}), \Delta u_i = 0 \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$$

$$u_i(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L, |u_i(x, y)| \leq M_i \quad \forall (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$$

$$\text{Тогда } u_1(x, y) = u_2(x, y), (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$$

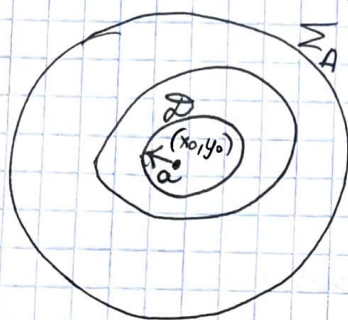
Доказательство Рассмотрим $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$

$$u \in C(E^2 \setminus \bar{D}), u \in C^2(E^2 \setminus \bar{D}), \Delta u = 0 \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$$

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in L.$$

$$|u(x, y)| \leq M = M_1 + M_2$$

$$\exists (x^*, y^*) \quad u(x^*, y^*) = \varepsilon > 0$$



$$W(x, y) = \frac{M \ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{A}{a}}$$

$$\Sigma_A (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = A^2$$

Область D_A ограничена
внутрь кривой L , а снаружи
кривой Σ_A

$$u(x, y) \in C(\bar{D}_A), u \in C^2(D_A)$$

$$\Delta u = 0 \text{ в } D_A$$

$$w \in C(\bar{D}_A), w \in C^2(D_A) \quad \Delta w = 0 \text{ в } D_A$$

$$w(x, y) = u(x, y) \quad (x, y) \in L \cup \Sigma_A$$

$$w(x, y) > 0 \quad (x, y) \in L \quad w(x, y) = M, (x, y) \in \Sigma_A$$

$$u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in L \quad u(x, y) \leq M \quad (x, y) \in \Sigma_A$$

$$\varepsilon = u(x^*, y^*) \leq w(x^*, y^*) = M \frac{\ln \frac{\sqrt{(x^* - x_0)^2 + (y^* - y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{A}{a}} \rightarrow 0 \quad \text{as } A \rightarrow \infty$$

Ср
зр

Пример единственности для условия

$$|u(x,y)| \leq M \quad (x,y) \in E^2 \setminus \bar{D}$$

$$D: x^2 + y^2 < 1, \quad L: x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} u(x,y) = 1 & (x,y) \in L \\ \Delta u = 0 & (x,y) \in E^2 \setminus \bar{D} \end{cases}$$

$$u_1(x,y) = 1$$

$$u_2(x,y) = 1 + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Внешнее задание Неймана в пространстве.

Определение Функция $u(x,y,z)$ наз. решением

внешней задачи Неймана, если

$$u \in C^1(E^3 \setminus \bar{\Omega}), \quad u \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega})$$

$$\Delta u = 0, \quad (x,y,z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = \psi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Sigma$$

$$|u(x,y,z)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$$

Определение Функция $u(x,y,z)$ называется

регулярной на бесконечности, если

$$|u(x,y,z)| \leq \frac{C}{r}$$

$$|u_x(x,y,z)|, |u_y(x,y,z)|, |u_z(x,y,z)| \leq \frac{C}{r^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{если} \quad r \geq r_0$$

Лемма Если функция $u(x,y,z)$ гармоническая
в области $E^3 \setminus \bar{\Omega}$ и $|u(x,y,z)| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то
 $u(x,y,z)$ явл. регулярной на бесконечности.

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)(-2y) + 2(2xy + 2x_0y_0) \cdot 2x$$

Теорема единственности. Пусть функции

$$u_i(x, y, z), i=1, 2$$

таковы что $u_i \in C^1(E^3 \setminus \Omega), u_i \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega})$

$$\Delta u_i = 0 \quad (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

$$(x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

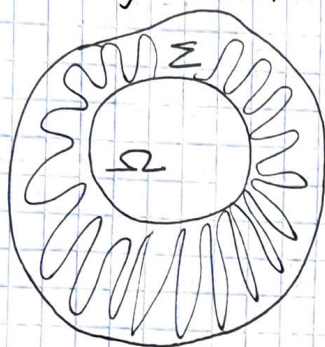
Доказательство

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$$

$$u \in C^1(E^3 \setminus \Omega), u \in C^2(E^3 \setminus \bar{\Omega}), \Delta u = 0, (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \Sigma$$

$$|u(x, y, z)| \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$



Область Ω_A ограничена кривыми Σ и кривой Σ_A

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_A} u \Delta v \, d\tau &= \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma + \iint_{\Sigma_A} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \\ &- \iiint_{\Omega_A} (\text{grad} u, \text{grad} v) \end{aligned}$$

Вектор функции ∇u

$$\iiint_{\Omega_A} u \Delta v \, d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma + \iint_{\Sigma_A} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \iint_{\Omega_A} (\text{grad} u, \text{grad} v) \, d\tau$$

$A \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\downarrow \text{по кривой } A \rightarrow \infty \\ \frac{\partial u}{\partial n} &\sim \frac{c}{A^2} \\ u &\sim \frac{c}{A} \end{aligned}$$

$$\text{grad} u = 0 \Rightarrow u = \text{const}$$

$$u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Задача №10. (Гуденков)

$$G(z, z_0) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{|R^2 - z\bar{z}_0|}{R|z - z_0|} = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \left((R^2 - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^2 + (r_0 \sin(\varphi - \varphi_0))^2 \right) - \ln((r \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0)^2 + (r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0)^2) - \ln R \right)$$

$$z = re^{i\varphi}, z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}, \bar{z}_0 = r_0 e^{-i\varphi_0}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=R} = - \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=R} = - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(R^2 - Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))(-r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) + (R^2 - Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^2 + (Rr_0 \sin(\varphi - \varphi_0))^2}{(R^2 - Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^2 + (Rr_0 \sin(\varphi - \varphi_0))^2} \right)$$

$$+ \frac{2(R \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0) \cos \varphi + 2(R \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0) \sin \varphi}{(R \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0)^2 + (R \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0)^2} =$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-2R^2 r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + 2Rr_0^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + 2Rr_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{R^4 - 2R^3 r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + R^2 r_0^2} \right) =$$

$$= - \frac{2Rr_0 \cos^2 \varphi - 2r_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi + 2R \sin^2 \varphi - 2R \sin \varphi_0 \sin \varphi}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2Rr_0^2 - 2R^2 r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{R^2 (R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} - \frac{2R - 2r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \right) =$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Rr_0^2 - Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} - \frac{R^2 - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} \right) =$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \frac{(r_0^2 - R^2)}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} = \frac{1}{2\pi} \frac{(R^2 - r_0^2)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} \cdot \frac{1}{R}, \text{ так как}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < R \\ u|_{r=R} = f(\varphi) \end{cases} \quad u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{(R^2 - r_0^2) d\varphi}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x, y < +\infty \\ u|_{y=0} = g_1(x) \\ u|_{x=0} = g_2(x) \end{cases} \quad z_0^{(1)} = z_0^2$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2 - \bar{z}_0^2}{z^2 - z_0^2} \right|$$

$$f(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \bar{z}_0^2}$$

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 - y^2 + 2ixy \\ z_0^2 &= x_0^2 - y_0^2 + 2ix_0 y_0 \\ \bar{z}_0^2 &= x_0^2 - y_0^2 - 2ix_0 y_0 \end{aligned}$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{((x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2) + (2xy + 2x_0 y_0))}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2xy - 2x_0 y_0)^2}$$

$$-\frac{\partial G}{\partial h} \Big|_{y=0} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)(-2y) + 2(2xy + 2x_0y_0) \cdot 2x}{(x^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2x_0y_0)^2} \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)(-2y) + 2(2xy - 2x_0y_0) \cdot 2x}{(x^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2x_0y_0)^2} \right) \Big|_{y=0} =$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{8xx_0y_0 - (-8xy_0x_0)}{(x^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2x_0y_0)^2} \right) = \frac{16xx_0y_0}{4\pi (x^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2x_0y_0)^2}$$

$$u_1(x_0, y_0) = \frac{4x_0y_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{g_1(x) x dx}{(x^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2x_0y_0)^2}$$

$$u_2(x_0, y_0) = \frac{4x_0y_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{g_2(y) y dy}{(y^2 - y_0^2 + x_0^2)^2 + (2x_0y_0)^2}$$

$$u(x_0, y_0) = u_1(x_0, y_0) + u_2(x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < y < \pi, -\infty < x < \infty \\ u|_{y=0} = g_1(x) \\ u|_{y=\pi} = g_2(x) \end{cases}$$

$$f(z) = e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

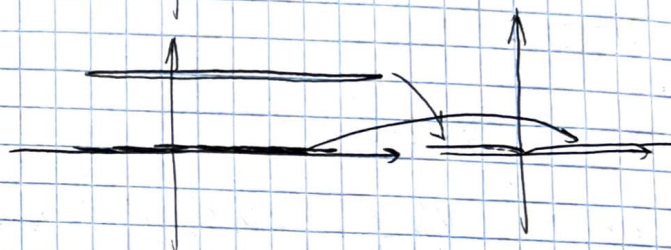
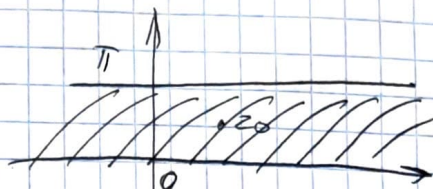
$$\text{Evalu } y=0, \text{ mo arg } f(z)=0$$

$$\text{Evalu } y=\pi, \text{ mo } f(z) = e^x \cdot e^{i\pi} = -e^x$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar{z}_0}} \right|$$

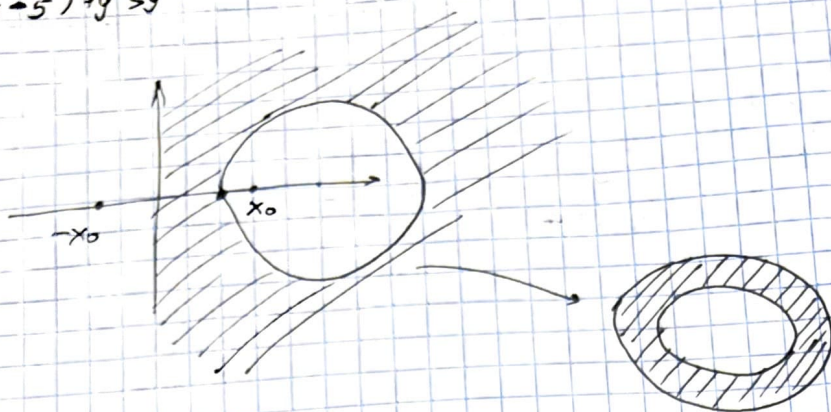
$$G(z, z_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln(e^x \cos y - e^{x_0} \cos y_0)^2 + (e^x \sin y + e^{x_0} \sin y_0)^2 \right) - \ln(e^x \cos y - e^{x_0} \cos y_0)^2 + (e^x \sin y - e^{x_0} \sin y_0)^2$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D \\ u|_{\Gamma} = f(p) \end{cases}$$



$$\Delta u = 0, x > 0 \quad (x-5)^2 + y^2 > 9$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \\ u|_{(x-5)^2 + y^2 = 9} = 1 \end{cases}$$



$$(5-x_0)(5+x_0) = 3^2$$

$$25 - x_0^2 = 9 \quad x_0 = 4$$

$$f(z) = \frac{z-4}{z+4}$$

$$|f(0)| = 1$$

$$|f(2)| = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}|_{r=1} = 0 \\ \tilde{u}|_{r=\frac{1}{3}} = 1 \end{cases}$$

$$u(r, \varphi) = a \ln r + b$$

$$u|_{r=1} = b, \quad u|_{r=\frac{1}{3}} = a \ln \frac{1}{3} + b = 1 \quad a = 2$$

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{-\ln r}{\ln 3}$$

$$u(x, y) = \frac{-1}{\ln 3} \ln |f(z)| = \frac{-1}{\ln 3} \ln \left| \frac{z-4}{z+4} \right| = \frac{-1}{\ln 3} \ln \sqrt{\frac{(x-4)^2 + y^2}{(x+4)^2 + y^2}}$$

Теорема нумерации

$$n=3$$

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \mu(p) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_p - \text{нумерическая характеристика области.}$$

$$W(M) = - \sum \iint_{\Sigma} \nu(p) \frac{d}{dn_{\text{ext}}} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_p = - \sum \iint_{\Sigma} \nu(p) \left(-\frac{1}{R_{MP}^2} (\vec{e}_{PM} \cdot \vec{n}_{\text{int}}) \right) d\sigma$$

$$= \sum \iint_{\Sigma} \nu(p) \frac{\cos \varphi_{MP}}{R_{MP}^2} d\sigma$$

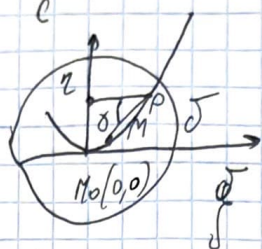
$n=2$ Потенциальный поток прямого и обратного тока

$$V(M) = \int_C \mu(p) \ln \frac{1}{R_{MP}} dp$$

$$W(M) = - \int_C \nu(p) \frac{d}{dn_{\text{ext}}} \ln \frac{1}{R_{MP}} dp = \int_C \nu(p) \frac{\cos \varphi_{MP}}{R_{MP}} dp$$

Исследуем непрерывность потенциала прямого тока

$$V(M) = \int_C \mu(p) \ln \frac{1}{R_{MP}} dp$$



$M_0(0,0)$
 $M(x,y), P(yeta,eta)$

Округлим т.то окружностью $r = \sigma$

$$\ln \frac{1}{R_{MP}} = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + (y-\eta)^2}} < \ln \frac{1}{|x-y|} \quad \begin{array}{l} -\sigma < x-y < \sigma \\ -\sigma < y-\eta < \sigma \end{array}$$

C_1 - внутренняя окружность радиуса контура. $-2\sigma < x-y < 2\sigma$

$$I_1 = \int_{C_1} \mu(p) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + (y-\eta)^2}} dp$$

$$|I_1| < 2k \int_{C_1} \ln \frac{dy}{|y-x|} \quad \gamma < \frac{\pi}{3}, \quad dp = \frac{dy}{\cos \gamma} < 2dy$$

$$y-x = t$$

$$dy = dt$$

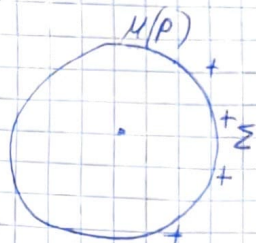
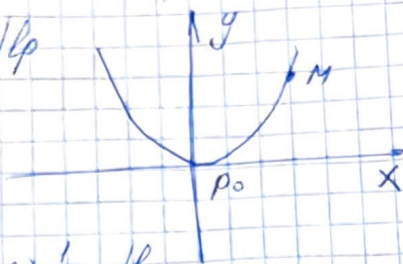
$$t \in (-2\sigma, 2\sigma)$$

$$|I_1| < 2k \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \ln \frac{dt}{|t|} = -4k \int_0^{2\sigma} \ln t dt = -4\pi \left(t \ln t - t \right) \Big|_0^{2\sigma} < \varepsilon$$

$V(M)$ непрерывна $\lim_{M \rightarrow 0} (t \ln t - t) = 0$

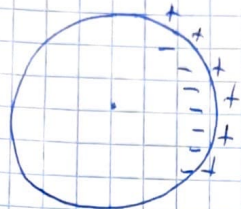
Задача N°11. (Условие)

$$W(M) = \int_C \frac{\gamma(p) \cos \varphi(M, p)}{R_{MP}} dl$$



$$V(M) = \iint_{\Sigma} \mu(p) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma$$

По-континууму



$$W(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\gamma(p) \cos \varphi(M, p)}{R_{MP}^2} d\sigma$$

$$\frac{\cos \varphi(p_0, M)}{R_{MP_0}} = \frac{y}{R_{MP_0}^2}$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 y''(\theta x)$$

$$W(M) = \int_C \gamma(p) \frac{\frac{1}{2} x^2 y''(\theta x)}{x^2 + (\frac{1}{2} x^2 y''(\theta x))^2} dl \rightarrow \frac{1}{2} y''(\theta) \quad x \rightarrow 0$$

$$R(p) = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{2} y''(0) \quad x \rightarrow 0$$

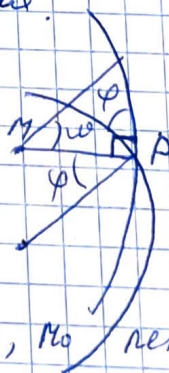
Разрыв потенциала градиента.

$$1) \gamma(p) = \gamma_0 = \text{const}$$

$$W(M) = \gamma_0 \int_C \frac{\cos \varphi(M, p)}{R_{MP}} dl$$

$$dl = R_{MP} d\omega = \cos \varphi(M, p) dl$$

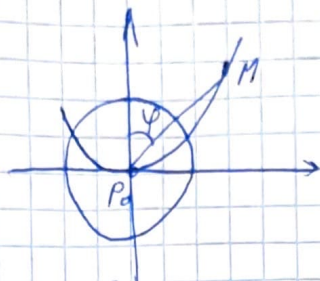
$$W(M) = \gamma_0 \int_C \frac{R_{MP} d\omega}{R_{MP}} = \gamma_0 \int_C d\omega = \begin{cases} 2\pi \gamma_0, & \text{М}_0 \text{ не лежит внутри контура} \\ \pi \gamma_0, & \text{М}_0 \text{ не лежит на контуре} \\ 0, & \text{М}_0 \text{ не лежит вне контура} \end{cases}$$



$$\begin{cases} W_{int}(p_0) = W(p_0) + \pi D_0 \\ W_{ext}(p_0) = W(p_0) - \pi D_0 \end{cases}$$

а теперь $D(p) \neq \text{const}$

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \int_C (D(p) - D_0) \frac{\cos \varphi(M, p)}{R_{MP}} dp$$



Докажем

$$I(M) = \int_{C_1} (D(p) - D(p_0)) \frac{\cos \varphi_{MP_0}}{R_{MP}} dp_0 + \int_{C_2} (D(M) - D(p_0)) \frac{\cos \varphi_{MP_0}}{R_{MP_0}} dp_0$$

Если $M \in C_1$, то $|D(p) - D_0| < \eta$

$$|I(M)| < \eta \int \frac{|\cos \varphi_{MP_0}|}{R_{MP}} dp < \eta \cdot B_C = \varepsilon$$

$\eta = \frac{\varepsilon}{B_C} \Rightarrow$ интеграл $I(M)$ стремится равномерно в каждой точке, то есть $I(M)$ является непрерывной функцией

$$W(M) = W^0(M) + I(M)$$

$$W_{int}(p_0) = W_{int}^0(p_0) + I(p_0) + \pi D(p_0) = W(p_0) + \pi D(p_0)$$

$$W_{ext}(p_0) = W(p_0) - \pi D(p_0)$$

$n=3$

$$\begin{cases} W_{int}(p_0) = W(p_0) + 2\pi D(p_0), \\ W_{ext}(p_0) = W(p_0) - 2\pi D(p_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D \\ u|_C = f(p) \end{cases}$$

$$\Delta u = 0, M \in D$$

$$u|_C = f(p)$$

$$u(M) = W(M) = \int D(p) \frac{\cos \varphi(M, p)}{R_{MP}} dp$$

1) $\Delta u = \Delta W = 0$, если M - внутренние точки

Поверхность Σ - пов-ть Ляпунова или эту пов-ть можно коснуться параболоидом



$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\omega_{\text{int}}(P_0) = \omega(P_0) + \pi \nu(P_0)$$

$$f(P_0) = \int_C \underbrace{\nu(p) \omega \varphi(P_0, p)}_{R_{P_0, p}} dp + \pi \nu(P_0)$$

Проведем контурное интегрирование
 $P_0 \rightarrow S_0, p \rightarrow s$

$$f(S_0) = \int_a^b R(S_0, s) \nu(s) ds + \pi \nu(S_0)$$

Теорема Фредгольма

7.1 $u(x) + \int_a^b k(x, s) u(s) ds = f(x)$

Если $v(x) + \int_a^b R(x, s) v(s) ds = 0 \quad Ax = b$

7.2. ур-ние $u(x) + \int_a^b k(x, s) u(s) ds = 0$

$z(x) + \int_a^b k_1(x, s) z(s) ds = 0$

7.3. Если $z(x) + \int_a^b k_1(x, s) z(s) ds = 0$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ — линейно независимые решения

$$u(x) + \int_a^b k(x, s) u(s) ds = f(x)$$

$$(f(x), \varphi_i(x)) = 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

Рассмотрим две простейшие случая функции

$$\omega(\varphi(P_0, p)) > 0$$

$$\pi \nu(S_0) + \int_a^b k(S_0, s) \nu(s) ds = 0$$

т.к. $\pi = \int_C \frac{\omega(\varphi(P_0, p))}{R_{P_0, p}} dp$, то $\pi \nu(S_0) = \int \nu(s_0) k(s_0, s) ds$

$$\int_a^b (\nu(s_0) + \nu(s)) k(s_0, s) ds = 0$$

т.к. $k(s_0, s) > 0$, то

$$\nu(s_0) + \nu(s) = 0$$

$$\nu(s_0) = 0$$

$$s = s_0$$

Решив линейное уравнение

$$f(s_0) = \int_a^b k(s_0, s) v(s) ds - \pi v(s_0)$$

одномерное уравнение имеет вид

$$\int_a^b (v(s_0) - v(s)) k(s_0, s) ds = 0, \text{ и } k(s_0, s) = k(s, s_0) > 0$$

и

$$v(s_0) - v(s) = 0$$

$$v(s_0) = v_0$$

$$\int_a^b f(s) v_0 ds = 0$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r > R, \\ u|_{r=R} = 1 \end{cases}$$

$$u(r, \varphi) = 1, \text{ и } \int_0^{2\pi} 1 v_0 d\varphi \neq 0$$

$$u(r, \varphi) = 1, \text{ и } \int_0^{2\pi} 1 v_0 d\varphi \neq 0$$

$$u(r) = w(r) = \int_{r=R}^r v(p) \frac{\cos \varphi(r, p)}{Rmp} dp$$

Если $Rmp \rightarrow \infty$

$$u(r) = w(r) + C$$

"Миндз" по поводу интегральных уравнений

$$\int_a^b k(x, s) z(s) ds = f(x)$$

$$z = \int_a^b k(x, s) z(s) ds + f$$

$$\int_0^1 z(x) dx = 1 \quad \text{не имеет}$$

A^{-1} не является непрерывным

Если A - комп. оператор

Век. оператор

AB - комп. оператор

$$u(x) = \int_0^1 x s^2 u(s) ds + 1$$

$$u(x) = x C_1 + 1$$

$$k(x, s) = \sum_{i=1}^n g_i$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = f(\varphi) \end{cases}$$

$$u(M) = w(M) = \oint \bar{v}(p) \frac{\cos(\varphi(M,p))}{R_{MP}} d\varphi$$

$$f(\varphi) = \oint \bar{v}(p) \frac{\cos(\varphi(p_0,p))}{R_{p_0 p}} d\varphi$$

$$f(\varphi) = \oint \int_0^{2\pi} \bar{v}(\psi) \frac{1}{2} d\psi + \pi \bar{v}(\varphi)$$

$$\bar{v}(\varphi) = \frac{1}{\pi} f(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{v}(\psi) d\psi$$

$$\bar{v}(\varphi) = \frac{1}{\pi} f(\varphi) - B$$

$$\frac{1}{\pi} f(\varphi) - B = \frac{1}{\pi} f(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} f(\psi) - B \right) d\psi$$

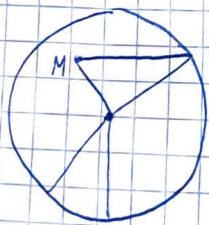
$$-B = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} f(\psi) - B \right) d\psi$$

$$u(M) = w(M)$$

$$\bar{v}(\varphi) = \frac{1}{\pi} f(\varphi) - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi$$

$$B = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi \quad \bar{v}(\varphi) = \frac{1}{\pi} f(\varphi) - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi$$

$$u(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} f(\psi) - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi \right) \frac{\cos \varphi(M,p)}{R_{MP}} d\psi$$



$$\cos \varphi(M,p) = \frac{R_{MP}^2 + R^2 - r^2}{2R_{MP} \cdot R}$$

$$u(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} f(\psi) \frac{R_{MP}^2 + R^2 - r^2}{2R_{MP}^2} d\psi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} f(\psi) d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left(\frac{R_{MP}^2 + R^2 - r^2}{R_{MP}^2} - 1 \right) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi)} d\psi$$

E3

Ω

$u(x, y, z)$ гармон в Ω

$$u \in C^1(\bar{\Omega})$$

$\forall M \in \Omega$

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) - \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_P$$

$$M(x, y, z), P(\xi, \eta, \zeta)$$

Задача Дирихле

$$\Delta u = 0, \Omega$$

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

Внутренняя задача Неймана

$$\Delta u = 0, \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

Формулы недростаточно для решения этих задач.

Функция Грина для внутренней задачи Дирихле.

$$u(x, y, z) \text{ гармон в } \Omega, u \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$v(x, y, z) \text{ гармон в } \Omega, v \in C^1(\bar{\Omega})$$

2 формулы Грина

$$\iint_{\Omega} [u \Delta v - v \Delta u] d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial v}{\partial n_P} - v \frac{\partial u}{\partial n_P} \right] d\sigma = 0$$

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) + v(P) \right] - \left(-\frac{1}{4\pi R_{MP}} + v \right) \frac{\partial}{\partial n_P} d\sigma_P$$

Определение Функция $G(M, P)$ для $M, P \in \Omega$

называется функцией Грина для внутренней задачи Дирихле, если

$$1) \forall M \in \Omega \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(M, P), \text{ где } v(M, P) \text{ гармоническая по } P \text{ в } \Omega, v(M, P) \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$2) \forall M \in \Omega \quad G(M, p) = 0, p \in \Sigma$$

$$\forall M \in \Omega \quad \nabla G(M, p) = -\frac{1}{4\pi R_{MP}}$$

Если u гарм в Ω и $u \in C(\bar{\Omega})$

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

а функция Грина $G(M, p)$ существует, то

$$u(M) = - \int_{\Sigma} \varphi(p) \frac{\partial G}{\partial n}(M, p) d\sigma_p$$

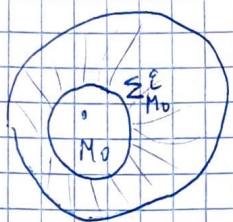
Свойства функции Грина.

Теорема 1. Если $G(M, p)$ функция Грина для внутренней задачи Дирихле, то $G(M, p) > 0 \forall M, p \in \Omega, M \neq p$

Док-во Пусть M_0 произв. точка т. из Ω . Покажем, что

$$G(M_0, p) > 0, \forall p \in \Omega, p \neq M_0$$

Пусть $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$ сфера с центром в M_0 , радиуса ε такая, что $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon} \subset \Omega$. Σ_{ε} обр. сферы $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$, а центр $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$ в Σ_{ε} . $G(M_0, p) \in C(\bar{\Sigma}_{\varepsilon})$; $G(M_0, p)$ гарм. (по p) в Σ_{ε}



$$\text{Поэтому } G(M_0, p) = \min_{\Sigma_{\varepsilon}} G(M_0, p) = \min_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}} G(M_0, p)$$

$G(M_0, p) = 0, p \in \Sigma$ по определению функции Грина

$\nabla G(M_0, p)$ ограничена в окр. M_0

$\varepsilon \rightarrow 0$, получаем $\frac{1}{R_{MP}} \rightarrow \infty \Rightarrow$ можно подобрать радиус, чтобы $G(M_0, p) > 0 \forall p \in \Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$

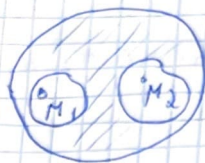
Пусть есть $p^* \in \Sigma_{\varepsilon}$ т.ч.

$$G(M_0, p^*) = 0 \Rightarrow G(M_0, p) = 0 \text{ в } \Sigma_{\varepsilon} \text{ - против.}$$

Теорема 2 Если $G(M, p)$ функция Грина внутр. зад. Дирихле, то $G(M, p) = G(p, M), \forall M, p \in \Omega$

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 произв. отмеченные т. в Ω . Покажем, что $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$

$$G(M_1, p) \text{ и } G(M_2, p)$$



$\Sigma_{M_1}^\epsilon$ и $\Sigma_{M_2}^\epsilon$ сферы радиуса ϵ с центрами в M_1 и M_2 целиком помещены в Ω_E
 Ω_E одн., ограниченная сферой Σ_ϵ и

цилиндры $\Sigma_{M_1}^\epsilon$ $\Sigma_{M_2}^\epsilon$ Второе сферическое Третье. где $G(M_1, p), G(M_2, p)$ в Ω_E

$$\iint_{\Omega_E} [G(M_1, p) \Delta G(M_2, p) - G(M_2, p) \Delta G(M_1, p)] d\tau =$$

$$= \iint_{\Sigma} [G(M_1, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_2, p) - G(M_2, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_1, p)] d\sigma +$$

$$+ \iint_{\Sigma_{M_1}^\epsilon} [G(M_1, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_2, p) - G(M_2, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_1, p)] d\sigma +$$

$$+ \iint_{\Sigma_{M_2}^\epsilon} [G(M_1, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_2, p) - G(M_2, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_1, p)] d\sigma$$

$$\iint_{\Sigma_{M_1}^\epsilon} G(M_1, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_2, p) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot 4\pi\epsilon^2 = \epsilon \rightarrow 0$$

$$G(M_1, p) = \frac{1}{4\pi R_{M_1, p}} + \mathcal{O}(M_1, p) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

$$- \iint_{\Sigma_{M_1}^\epsilon} G(M_2, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_1, p) d\sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial n_p} G(M_1, p) = \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{4\pi R_{M_1, p}} + \mathcal{O}(M_1, p) \right)$$



$$\vec{n} = \left\{ -\frac{y-x}{R_{M_1, p}}, -\frac{\eta-y}{R_{M_1, p}}, -\frac{y-z}{R_{M_1, p}} \right\}$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{R_{M_1, p}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R_{M_1, p}} \right) = \frac{-1 \cdot 2(y-x)}{2(R_{M_1, p})^3} = -\frac{(y-x)}{(R_{M_1, p})^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_1, p}} \right) = \frac{(y-x)^2 + (\eta-y)^2 + (y-z)^2}{R_{M_1, p}^4}$$

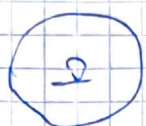
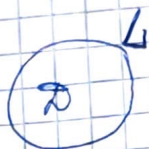
$$= \frac{1}{R_{M1}^2}$$

$$\iint_{\Sigma_{M1}} G(M_2, p) \frac{\partial}{\partial n_p} G(M_1, p) d\sigma_p \sim \iint_{\Sigma_{M1}} G(M_2, p) \frac{1}{4\pi R_{M1}^2} d\sigma_p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(M_2, M_1)$$

Переходим к пределу:

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$$

Потенциалы E^2



$$v(M) = \iint_{\Sigma} g(p) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_p$$

Потенциал прямого слоя; $g(p)$ — плотность потенциала прямого слоя, $g(p) \in C(\Sigma)$

$g(p)$ — плотность массы на поверхности (концентрация массы)

$$u(M) = - \iint_{\Sigma} f(p) \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_p$$

Потенциал двойного слоя, $f(p)$ — плотность

Потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа всюду вне эллипса.

Криволинейные, постоянные моменты дифференцировать по параметру.

$$\Delta v = \iint_{\Sigma} g(p) \left(\Delta \frac{1}{R_{MP}} \right)$$

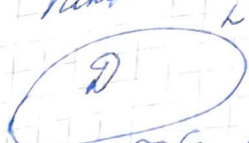
$$E^2 \quad u(M) = - \int_{\Sigma} f(p) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_p =$$

$$= - \int_{\Sigma} f(p) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) n_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) n_2 \right] d\sigma_p =$$

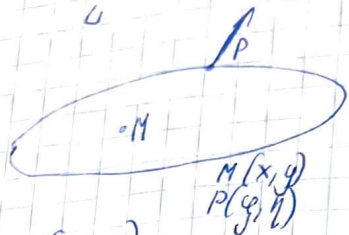
$$\Delta u(M) = - \int_{\Sigma} f(p) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \ln \frac{1}{R_{MP}} \right) n_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \ln \frac{1}{R_{MP}} \right) n_2 \right] d\sigma_p$$

Решение №11. (Темнов)

E^2



$$u(M) = - \int_L f(p) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) dl_p$$



$$-\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} = \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MP}) = \text{grad}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\ln r_{MP}) = \frac{1}{r_{MP}} \frac{1}{2} \frac{(y-x)}{r_{MP}} =$$

$$= \frac{(y-x)}{r_{MP}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\ln r_{MP}) = \frac{(n-y)}{r_{MP}^2}$$

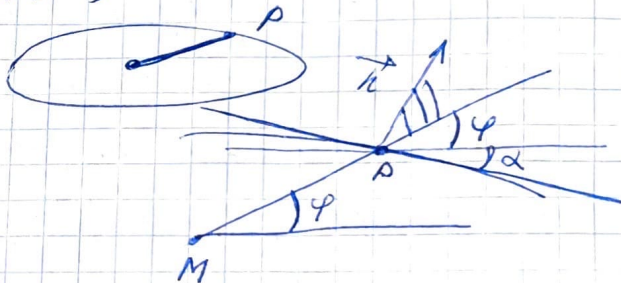
$$\text{grad}(\ln r_{MP}) = \frac{\vec{MP}}{r_{MP}^2}$$

$$(\text{grad}(\ln r_{MP}), \vec{n}) = \frac{(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2} = \frac{r_{MP} \cdot \cos \angle MPn}{r_{MP}^2}$$

$$u(M) = \int_L f(p) \frac{\cos \angle MPn}{r_{MP}} dl_p$$

Темновская формула для E^2 с единичной плотностью ($f(p)=1$)

$$u_e(M) = \int_L \frac{\cos \angle MPn}{r_{MP}} dl_p$$



Кривая $L \subset \mathbb{C}^2$
и строим внешнюю

$$\cos \angle MPn dl_p$$

$$\angle MPn = \frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha\right) = \sin(\varphi + \alpha) dl_p = \sin \varphi \cos \alpha dl_p + \cos \varphi \sin \alpha dl_p = -\sin \varphi dy + \cos \varphi dx$$

$$P(\varphi, \eta) =$$

$$\varphi = \tau(\varphi) \cos \varphi = \cos \varphi \quad dy = -dl_p \cos \alpha$$

$$\eta = \tau(\varphi) \sin \varphi = \sin \varphi \quad d\eta = dl_p \sin \alpha$$

$$dx = (\tau'(\varphi) \sin \varphi + \tau(\varphi) \cos \varphi) d\varphi$$

$$dy = (\tau'(\varphi) \cos \varphi - \tau(\varphi) \sin \varphi) d\varphi$$

$$= -\sin \varphi (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi) + \cos \varphi (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi) d\varphi = r(\varphi) d\varphi$$

$$\cos \angle \vec{MP} \vec{n} d\varphi = r(\varphi) d\varphi$$

$$u_e(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \angle \vec{MP} \vec{n}}{r_{MP}} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$u_e(M) = \begin{cases} 2\pi, & M \in D \\ \pi, & M \in L \\ 0, & M \notin \overline{D} = E^2 \setminus \overline{D} \end{cases}$$

$$\frac{\cos \angle \vec{MP} \vec{n}}{r_{MP}} = \frac{d\varphi}{dr} > 0$$

Теорема из М.А.

$M(x, y); P(\xi, \eta) \in (M, P)$ определена и непрерывна где

$\forall M, P \quad M \neq P$

$$\int_L F(M, P) d\varphi$$

Определение Интервал $I(M)$ называется равномерно сходящимся в т. $P^* \in L$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ окрестность т. $P^* \cap V(P^*)$ и дуга $l \subset L$, т.ч. $l \subset V(P^*)$, что $\forall M \in V(P^*)$

$$\text{То интервал } \left| \int_l F(M, P^*) d\varphi \right| = \varepsilon$$

Теорема

Если интервал $I(M)$ равномерно сходится в $P^* \in L$, то $I(M)$ в т. P^* Получим этой теоремой

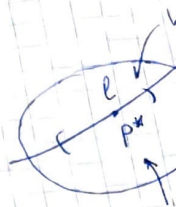
$$\text{Рассмотрим функцию } v(M) = u(M) - f(P^*) u_e(M)$$

Теорема. Если $f(P)$ непрерывна в P^* , то

$$v(M) \text{ непрерывна в } P^*$$

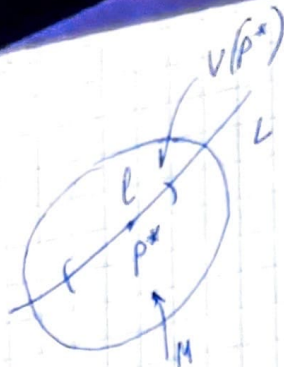
До-во: Так как $f(P)$ непрерывна в P^* , то существует дуга l , т.ч.

$$\forall P \in l \quad |f(P) - f(P^*)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$



Теорема
 $\lim_{M \rightarrow P^*}$

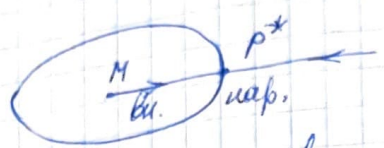
До-во



$$v(M) = \int_0^L [f(p) - f(p^*)] \frac{\cos \angle M p \vec{n}}{r_{Mp}} dp$$

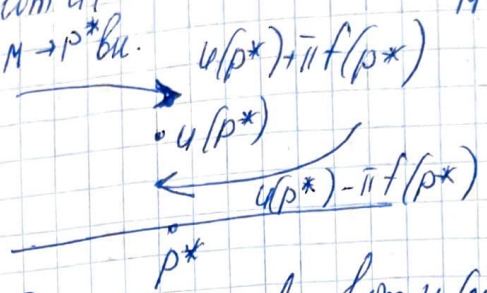
$$| \int_0^L [f(p) - f(p^*)] \frac{\cos \angle M p \vec{n}}{r_{Mp}} dp |$$

$$| \int_{\Delta\varphi} [f(\varphi) - f(\varphi^*)] d\varphi | \leq \varepsilon$$



Теорема Существует пределы

$$\lim_{M \rightarrow p^* \text{ вн.}} u(M) = \pi f(p^*) + u(p^*), \quad \lim_{M \rightarrow p^* \text{ вн.}} u(M) = -\pi f(p^*) + u(p^*) \quad \forall p^* \in L$$



Доказательство $\lim_{M \rightarrow p^* \text{ вн.}} u(M) = \lim_{M \rightarrow p^* \text{ вн.}} [u(M) - f(p^*) u_e(M) + f(p^*) u_e(M)] =$

$$u(p^*) - f(p^*) u_e(p^*) + f(p^*) \cdot 2\pi =$$

$$= \pi f(p^*) + u(p^*)$$

$$\lim_{M \rightarrow p^* \text{ вн.}} u(M) = \lim_{M \rightarrow p^* \text{ вн.}} [u(M) - f(p^*) u_e(M) + f(p^*) u_e(M)] =$$

$$= u(p^*) - \pi f(p^*)$$

$$\lim_{M \rightarrow p^* \text{ вн.}} = u(p^*) + \pi f(p^*)$$

Задача Дирихле

Найти $u(x,y)$ т.ч. $u \in C(\bar{D}), u \in C^2(D), \Delta u = 0, (x,y) \in D$

$$u(x,y) = \gamma(x,y), (x,y) \in \partial$$

$\gamma(x,y)$ заданная функция.

$$u(x, y) = \int_L f(p) \frac{\cos \angle M \vec{p} \vec{n}}{r_{MP}} dp, M \in D$$

$\left\{ \begin{aligned} & \pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle M \vec{p} \vec{n}}{r_{MP}} dp, M \in L, \text{ если условия} \\ & \text{выполнены для } \forall f \in C(\bar{D}), \text{ положили } f, \text{ исходя} \end{aligned} \right.$

из граничных условий.

$$\pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle M \vec{p} \vec{n}}{r_{MP}} dp = 0 \quad (1)$$

Интегральное уравнение Фредгольма 2-ого рода, относительно неизвестной $f(M)$

Теорема Фредгольма. Если однородное уравнение 1-го класса непрерывных на L функций $f(M)$ имеет только нулевое решение, то уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение для любой непрерывной функции на L $\delta(M)$

Теорема (существование решения задачи Дирихле)

Пусть $\delta(M)$ непрерывна. Тогда решение задачи Дирихле существует.

Покажем, что однород. ур-ние (1) имеет только нулевое решение в классе непрерывных функций.

$$\pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle M \vec{p} \vec{n}}{r_{MP}} dp = 0 \quad \forall M \in L$$

Пусть существует $f(M^*)$, т.е.

$$f(M^*) = \max_{M \in L} f(M) = \max_{M \in L} |f(M)|$$

$$\pi f(M^*) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle M^* \vec{p} \vec{n}}{r_{M^*p}} dp = 0 \quad \pi f(M^*) = - \int_L f(p) \frac{\cos \angle M^* \vec{p} \vec{n}}{r_{M^*p}} dp$$

$$\int_L f(M^*) \frac{\cos \angle M^* \vec{p} \vec{n}}{r_{M^*p}} dp + \int_L f(p) \frac{\cos \angle M^* \vec{p} \vec{n}}{r_{M^*p}} dp =$$

$$= \int_L [f(M^*) + f(p)] \frac{\cos \angle M^* \vec{p} \vec{n}}{r_{M^*p}} dp > 0$$